SUBJECT: 3 / /

مثال ١: حل المعادلة التفاضلية التالية:

$y' = 3x^2(y+1)$ نضرب الطرفين بـ dx ونقسم على $y+1$

$\int \frac{dy}{y+1} = \int 3x^2 dx$; $y+1 \neq 0$

$\ln|y+1| = x^3 + \ln(c)$

نأخذ e الطرفين

$\ln \frac{y+1}{c} = x^3 \Rightarrow e^{\ln \frac{y+1}{c}} = e^{x^3}$

$y+1 = ce^{x^3} \Rightarrow y = ce^{x^3} - 1$

فإذا كان $y+1=0 \Leftarrow y=-1$ إذاً هو حل خاص للمعادلة وذلك لأنه يحقق المعادلة

وينتج من عبارة الحل العام عندما $c=0$

مثال 2: جد الحل الخاص $y' = x.y$

نقسم على y ونضرب بـ dx ; $y \neq 0$

$\int \frac{dy}{y} = \int x\, dx$

$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + \ln c$

$\ln \frac{y}{c} = \frac{x^2}{2} \xRightarrow{\text{بأخذ e الطرفين}} y = c.e^{\frac{x^2}{2}}$

فإذا كانت $y=0$ هو حل خاص للمعادلة لأنه ينتج من عبارة الحل العام باختيار $c=0$.

مثال 3:

$y' = x.y^2$

$\int \frac{dy}{y^2} = \int x\, dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + c$

$y = -\frac{2}{x^2+c} \Rightarrow y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$

هو حل شاذ لأنه لا ينتج من عبارة الحل العام مهما أخذنا من قيم c.

مثال 4 :

$$y' = f(ax + by + c)$$

$$y' = 2x + y + 1 \Rightarrow 2x + y + 1 = Z$$

$$y = Z - 2x - 1 \Rightarrow y' = Z' - 2$$

$$Z' - 2 = Z \Rightarrow \boxed{Z' = Z + 2} \star$$

هي معادلة ذات متحولات منفصلة نفصل متحولاتها :

$$Z + 2 \neq 0 \ , \int \frac{dZ}{Z+2} = \int dx \Rightarrow x + \ln c = \ln |Z + 2|$$

نأخذ الطرفين

$$\ln \frac{Z+2}{c} = x \Rightarrow Z + 2 = ce^{x}$$

$$Z = ce^{x} - 2$$ الحل العام لـ $\star$

لإيجاد الحل العام لـ y نعوض في المتحولات القديمة

$$2x + y + 1 = ce^{x} - 2$$

$$\boxed{y = ce^{x} - 2x - 3}$$ وهو الحل العام للمعادلة المعطاة.

فإذا كان $Z + 2 = 0 \Leftarrow Z = -2$

$$\Rightarrow 2x + y + 1 = -2$$

$$\boxed{y = -2x - 3} \Rightarrow y' = -2$$ هو حل للمعادلة لأنه يحققها

نعوضها في المعادلة

$$-2 \stackrel{?}{=} 2x - 2x - 3 + 1$$

$$-2 \stackrel{?}{=} -2$$

تحقق المعادلة

نلاحظ أن $y = -2x - 3$ ينتج من عبارة الحل العام بإعطاء قيمة لـ c وهي صفر وهو حل خاص.

---

2) معادلات تفاضلية التي ترد إلى معادلات ذات متحولات منفصلة وهي من شكل $y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$

حيث أن a_1, b_1, c_1 ، a, b, c ثوابت إذا كان $c = c_1 = 0$ ردت المعادلة إلى متجانسة

وبما أن كلاً من البسط $D_1: ax + by + c = 0$ يشكل معادلة للمستقيم D_1 ، $D_2: a_1x + b_1y + c_1 = 0$

SUBJECT:

لذلك هما معادلتي مستقيمين وللمستقيم يوجد ثلاث حالات ١- متوازيين ٢- متقاطعين ٣- منطبقان.

الحالة الأولى: المستقيمين D_1 و D_2 متقاطعان، وفي هذه الحالة ينتج لدينا معادلة متجانسة سندرسها فيما بعد.

الحالة الثانية: المستقيمين D_1 و D_2 متوازيين وهذا يكافئ الشرط $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} \neq \frac{c_1}{c_2}$ فإذا رمزنا لهذه القيمة المتساوية ولتكن:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \lambda \Rightarrow a = a_1\lambda$$
$$b = b_1\lambda$$

نعوض في المعادلة المعطى

$$y' = f\left(\frac{a_1\lambda x + b_1\lambda y + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right) = \varphi(a_1x + b_1y)$$

هي علاقة ترتبط بـ a_1x

وهي معادلة من النوع الأول الذي يرد إلى معادلة ذات متحولات منفصلة.

الحالة الثالثة: المستقيمان D_1, D_2 منطبقان وهذا يكافئ النسب

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \mu$$

$$\Rightarrow a = a_1\mu \quad , \quad b = b_1\mu \quad , \quad c = c_1\mu$$

نعوض في المعادلة المعطاة.

$$y' = f\left(\frac{(a_1x + b_1y + c_1)\mu}{a_1x + b_1y + c_1}\right) \Rightarrow y' = f(\mu) = \mu_1 \text{ ثابت}$$

$$\int dy = \int \mu_1 dx \Rightarrow y = \mu_1 x + c$$